

基于 MIMO 雷达的相干分布式目标 参数估计 Cramer-Rao 下界

江胜利¹, 刘 中¹, 邓 海²

(1. 南京理工大学电子工程系, 江苏南京 210014; 2. 北德克萨斯大学电气工程系, 美国德克萨斯 76203)

摘 要: 本文研究了 MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计的 Cramer-Rao 下界(CRB). 首先, 给出相干分布式目标的 MIMO 雷达信号模型, 推导出目标参数估计 CRB 的一般关系式; 然后, 给出在一个分布式目标、点目标和目标部分信息已知等特殊情况下的 CRB; 其次, 讨论了 MIMO 雷达 CRB 的性质; 最后, 进行计算机仿真试验, 研究不同条件下的 MIMO 雷达性能. 结果表明由于具有避免波束形状损失等优点, MIMO 雷达对相干分布式目标的参数估计 CRB 性能优于普通相控阵雷达. 本文的研究揭示了 MIMO 雷达的相干分布式目标参数估计性能.

关键词: MIMO 雷达; 相干分布式目标; Cramer Rao 下界

中图分类号: TN957. 51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2009)01-0101-07

Cramer-Rao Bounds for Estimating Parameters of Coherently Distributed Targets Using MIMO Radars

JIANG Sheng li¹, LIU Zhong¹, DENG Hai²

(1. Department of Electronic, Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. Department of Electrical Engineering, University of North Texas, Denton, TX 76203, USA)

Abstract: This paper studies the Cramer Rao Bounds(CRB) for estimating parameters of coherently distributed targets(CDT) using Multi Input Multi Output(MIMO) radars. Firstly, the MIMO radar signal model for estimating the CDT parameters is given and the general CRB expression is derived. Then, several CRBs are given in special cases such as a distributed target, a point target and a target with partial information. Thirdly, the CRB properties of MIMO radars are discussed. Finally, the MIMO radar performances are simulated in different conditions through computer simulations. Theoretical analyses and computer simulations show that the MIMO radar is superior to the traditional phased array radar in estimating the CDT parameters because the former has no beam shape loss. The research conducted in this paper reveals the fundamental performances of the MIMO radars.

Key words: MIMO radar; coherently distributed targets; Cramer Rao bounds

1 引言

近年来, 随着雷达研究的深入和多输入多输出(Multi Input Multi Output, MIMO)通信的快速发展, 雷达与 MIMO 通信交融建立起来的 MIMO 雷达受到雷达界的广泛关注. 目前的 MIMO 雷达研究主要集中在两种不同形式的 MIMO 系统^[1]: 一是基于相控阵体制的 MIMO 雷达, 通过发射波形正交性、采用相干处理各单元发射的信号^[2~5]; 二是基于多基地(Multi-static)或多站点(Multi-site)的 MIMO 雷达, 其收发单元间距足够大, 从而使得各单元信号相互独立, 以此获得空间分集增益提高雷达的检测和估计性能^[6].

本文研究第一类 MIMO 雷达. 法国国家航空局在 20

世纪 70 年代末提出的综合脉冲孔径雷达可看成是 MIMO 雷达的雏形^[2]. 继而, 人们从不同方面对这类雷达进行了研究. 文献[3]研究了 MIMO 雷达的角度分辨率、GMTI 性能以及发射波形优化设计等问题; 文献[4]对 MIMO 雷达中各种高分辨谱估计方法进行了研究; 文献[5]研究了 MIMO 雷达在高斯白噪声下对点目标的估计与检测性能.

在业已发展的 MIMO 雷达目标参数估计方面, 目前研究的目标模型主要是点目标, 有关分布式目标参数估计研究方面的文章还鲜见报道. 众所周知, 实际工作环境下的目标常常具有分布式特性, 雷达分布式目标可以在不同情况下产生^[7~9]. 对于分布式目标, 如果仍采用基于点目标模型的参数估计方法, 其估计性能将严重下

降. 为此在过去的十几年里, 针对不同的分布式目标模型, 在阵列信号处理领域已发展了许多用于分布式目标参数估计的方法^[8-12]. 但是上述处理方法并未考虑到发射信号波形对目标参数估计性能的影响. 本文在 MIMO 雷达对点目标参数估计和基于阵列的相干分布式目标参数估计的基础上, 研究了 MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计的 CRB. 重点比较 MIMO 雷达与普通相控阵雷达对相干分布式目标参数估计的 CRB 以及 MIMO 雷达对一个点目标和对一个相干分布式目标参数估计 CRB 的性质, 从而揭示了 MIMO 雷达的相干分布式目标参数估计性能.

2 相干分布式目标信号模型

本文研究图 1 所示的 MIMO 雷达系统. 它由 M 个坐标分别为 $Z_m = (x_m, y_m)^T$ ($m = 1, \dots, M, T$ 表示转置) 的雷达单元组成, 各单元使用相同的载频发射相互正交的窄带信号. 设在 n 时刻雷达单元 i 发射的基带信号为 $s_i[n]$ ($i = 1, \dots, M$), 则第 m 个接收单元接收到的相干分布式目标的回波信号为:

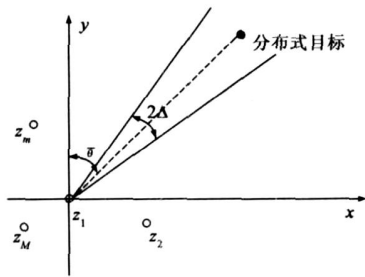


图1 MIMO雷达系统结构示意图

$$y_m[n] = \alpha \sum_{i=1}^M B_{im}(\varphi) s_i[n] + w_m[n] \quad m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N$$

$$B_{im}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} A_{im}(\theta) p(\theta|\varphi) d\theta, A_{im}(\theta) = a_i(\theta) a_m(\theta)$$

$$a_i(\theta) = \exp(-j2\pi\lambda(x_m \sin(\theta) + y_m \cos(\theta))) \quad (1)$$

式中 α 表示目标回波强度, λ 表示波长, $w_m[n]$ 表示第 m 个接收单元接收噪声. $p(\theta|\varphi)$ 为相干分布式目标的角功率密度函数, $\varphi = [\bar{\theta}, \Delta]^T$, 其中 $\bar{\theta}$ 和 Δ 分别表示分布式目标的平均波达方向和角分布宽度, 故式(1)可看成是分布在以 $\bar{\theta}$ 为中心、宽度为 2Δ 的角度范围内的许多相干点目标的回波之和. 将式(1)表示成矩阵形式可得:

$$y = \alpha \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S}) + w$$

$$\mathbf{S} = [s_{11}[1], s_{21}[1], \dots, s_{M1}[1]; \dots; s_{1N}[1], s_{2N}[1], \dots, s_{MN}[1]]^T,$$

$$[\mathbf{B}(\varphi)]_{im} = B_{im}(\varphi)$$

$$w = [w_{11}[1], w_{21}[1], \dots, w_{M1}[1]; \dots; w_{1N}[1], w_{2N}[1], \dots, w_{MN}[1]]^T$$

$$y = [y_{11}[1], y_{21}[1], \dots, y_{M1}[1]; \dots; y_{1N}[1], y_{2N}[1], \dots, y_{MN}[1]]^T \quad (2)$$

其中 vec 表示矩阵运算中的向量化函数. 当存在 L 个相干分布式目标时, 由式(2)可知 MIMO 雷达接收到的回

波信号为:

$$y = \sum_{l=1}^L \alpha_l \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi_l) \mathbf{S}) + w \quad (3)$$

其中 α_l 和 φ_l 分别表示第 l 个相干分布式目标的回波强度和方向参数. 式(3)具有一定的普遍意义. 当 $\Delta_l = 0$ 时, 式(3)是文献[5]的点目标参数估计的 MIMO 雷达模型; 当各单元发射信号为相关信号时, 式(3)是传统的相控阵雷达分布式目标参数估计模型. 相干分布式目标的参数估计问题可表述为给定 N 个快拍的测量向量 y , 估计出分布式目标的平均波达方向 $\bar{\theta}_l$ 以及角分布宽度 Δ_l . 本文研究基于式(3)的相干分布式目标参数估计 CRB.

3 相干分布式目标参数估计 Cramer-Rao 下界

定理 1 白高斯噪声环境下, MIMO 雷达对 L 个相干分布式目标空间参数 $\phi = [\bar{\theta}_1, \Delta_1, \dots, \bar{\theta}_L, \Delta_L]^T$ 以及对一个相干分布式目标空间参数 $\varphi = [\bar{\theta}, \Delta]^T$ 估计的 CRB 分别为:

$$\text{CRB}(\phi) = [J_{\phi\phi} - J_{\phi\alpha} J_{\alpha\alpha}^{-1} J_{\alpha\phi}^T]^{-1} \quad (4)$$

$$\text{CRB}(\varphi) = \frac{\sigma_w^2}{2|\alpha|} 2[\text{Re}(\mathbf{B}_1^H(\varphi) \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}_1(\varphi))]^{-1} \quad (5)$$

证明 证明过程以及 $J_{\phi\phi}$ 、 $J_{\phi\alpha}$ 、 $J_{\alpha\alpha}$ 、 $\mathbf{B}_1(\varphi)$ 、 \mathbf{P}_B^\perp 的数学表达式见附录 A.

由式(4)可以看出由于雷达单元发射不同的波形和目标的角度扩展, 分布式目标参数与目标回波强度相互影响, 基于 MIMO 的分布式目标估计 CRB 比基于阵列的 CRB 和基于 MIMO 雷达的点目标估计 CRB 都复杂得多^[5,13]. 分布式目标参数估计可以采用最大似然估计方法^[14] 渐近实现上述两式的 CRB. 基于 MIMO 雷达的相干分布式目标估计算法将在未来的工作中研究.

由式(5)可以看出在一个目标的情况下, MIMO 雷达对点目标和相干分布式目标参数估计的 CRB 具有相同的形式, 两者之间的区别仅在于表征目标空间位置的方向矩阵不同, 当 $\Delta = 0$ 时, 式(5)退化到文献[5]中式(63)所给的点目标 DOA 估计 CRB. MIMO 雷达的几何结构和发射波形决定其对分布式参数估计的性能, 以下推论给出两个雷达单元时, 雷达发射波形相关系数对 CRB 的影响.

推论 对单元间距为 d 的两个雷达单元组成的 MIMO 雷达, 若雷达发射波束指向法线方向, $p(\theta|\varphi)$ 是均匀分布的, 即 $p(\theta|\varphi) = \begin{cases} 1/2\Delta, & |\theta - \bar{\theta}| \leq \Delta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则对已知小角分布宽度的分布式目标平均波达方向 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与发射信号间相关系数 β 之间的关系可近似表示为:

$$CRB_{\beta}(\bar{\theta}|\Delta) = \frac{1}{2SNR} \cdot \frac{1}{(2d\pi\cos(\bar{\theta})/\lambda)^2 \left[2 - \frac{\beta^2 \sin^2(2\pi d \sin(\bar{\theta})/\lambda)}{1 + \beta \cos(2d\pi \sin(\bar{\theta})/\lambda)} \right]} \quad (6)$$

其中 $SNR \triangleq \frac{N|a|^2}{\sigma_w^2}$, 且 $CRB_{\beta=0}(\bar{\theta}|\Delta) \leq CRB_{\beta}(\bar{\theta}|\Delta) \forall \bar{\theta}$, 当 $\bar{\theta} = 0$ 时, 等号成立.

证明 (见附录 B).

由推论可以看出当雷达发射波束指向法线方向时, 对任意方向的目标, MIMO 雷达系统只有发射正交波形 ($\beta = 0$) 方可实现最小的 CRB; 当目标处于法线方向时, CRB 与发射波形无关. 而对普通相控阵雷达, 由于发射方向性波束, 当发射波束未对准目标时, 将会产生波束形状损失 (beam shape loss) 降低目标参数估计性能^[5].

类似于定理 1 的推导, 可得已知一个相干分布式目标部分参数时, 对未知参数估计的 CRB 如定理 2 所述.

定理 2 在一个相干分布式目标的情形下, 已知 α 和 Δ 时的 MIMO 雷达对平均波达方向 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 为

$$CRB(\bar{\theta}|\alpha, \Delta) = \frac{1}{2SNR} \left[\left(\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi))}{\partial \bar{\theta}} \right)^H \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi))}{\partial \bar{\theta}} \right]^{-1}$$

已知 α 和 $\bar{\theta}$ 时对角分布宽度 Δ 估计的 CRB 为

$$CRB(\Delta|\alpha, \bar{\theta}) = \frac{1}{2SNR} \left[\left(\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi))}{\partial \Delta} \right)^H \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi))}{\partial \Delta} \right]^{-1}$$

已知 α 时的 MIMO 雷达对波达方向为 $\bar{\theta}$ 的点目标 DOA 估计的 CRB 为

$$CRB(\bar{\theta}|\alpha) = \frac{1}{2SNR} \left[\left(\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{A}(\bar{\theta}))}{\partial \bar{\theta}} \right)^H \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{A}(\bar{\theta}))}{\partial \bar{\theta}} \right]^{-1}$$

其中 $[\mathbf{A}(\bar{\theta})]_{im} = A_m(\bar{\theta})$.

4 MIMO 雷达对一个相干分布式目标参数估计 CRB 的性质

尽管 MIMO 雷达对一个点目标和一个相干分布式目标的参数估计 CRB 具有相同的形式, 但是受到分布式参数的影响, 相干分布式目标参数估计 CRB 具有与点目标不同的性质. 根据上节给出的 CRB, 本节重点研究 MIMO 雷达对一个相干分布式目标参数估计 CRB 的性质.

性质 1 若雷达质心位于原点, 即 $\sum_{m=1}^M \mathbf{z}_m = \mathbf{0}$, MIMO 雷达对点目标 DOA 估计的 CRB 与回波强度 α 是否已知无关; 而对于相干分布式目标, 已知信号回波强度 α 时参数估计的 CRB 不大于未知 α 时的 CRB.

证明 (见附录 C).

性质 2 若雷达质心位于原点, 则 MIMO 雷达对小角分布宽度的相干分布式目标平均波达方向 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB ($CRB(\bar{\theta})$) 不小于对波达方向等于 $\bar{\theta}$ 的点目标 DOA 估计的 CRB ($CRB_{\theta=\bar{\theta}}(\bar{\theta})$); 当角分布宽度 Δ 趋近于零

时, MIMO 雷达对相干分布式目标角分布宽度 Δ 估计的 CRB ($CRB(\Delta)$) 趋近于无穷大.

证明 (见附录 D).

性质 3 MIMO 雷达对一个相干分布式目标以及一个点目标参数估计的 CRB 随雷达单元数 M 的增大而减小.

证明 (见附录 E).

这些性质进一步说明了 MIMO 雷达的性能, 可以看出 MIMO 雷达对点目标的估计性能是对分布式目标估计可能达到的上限.

5 计算机仿真

在理论推导的基础上, 本节通过计算机仿真模拟 MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计 CRB. 在数值模拟中, 假设角功率密度函数为均匀分布. MIMO 雷达系统由 M 个排成直线的雷达单元组成, 单元间距等于半个波长. 除特殊说明外, MIMO 雷达的质心取在原点. 在比较 MIMO 雷达与普通相控阵雷达对相干分布式目标参数估计 CRB 性能时, 对 MIMO 雷达波束在目标上的驻留时间进行了补偿^[5].

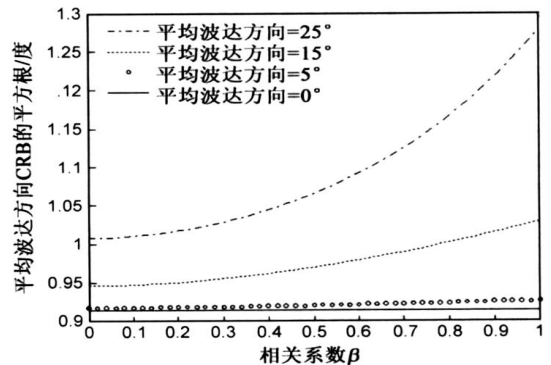


图2 已知 Δ 时对 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与 β 的关系曲线

图 2 和图 3 分别给出了在 Δ 已知和未知两种情况下, $M = 2$, $SNR = 20\text{dB}$, $\Delta = 2^\circ$, 且发射波束指向法线方向时, MIMO 雷达对不同 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与相关系数 β 的关系. 由图可知, 与文献^[5]中点目标的情形相类似, MIMO

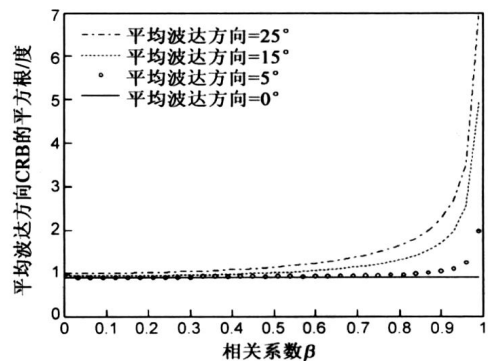


图3 未知 Δ 时对 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与 β 的关系曲线

雷达对相干分布式目标平均波达方向 $\bar{\theta}$ 的估计 CRB 随 β 的增大而增大; 并且在未知 Δ 时, 当 β 趋近于 1, MIMO 雷达对 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 趋近于无穷大, 即 MIMO 雷达对分布式目标平均波达方向估计的 CRB 性能优于普通相控阵雷达. 同时, 还可以看出当目标的 $\bar{\theta}$ 来自法线方向时是其它方向目标可能达到的最小 CRB.

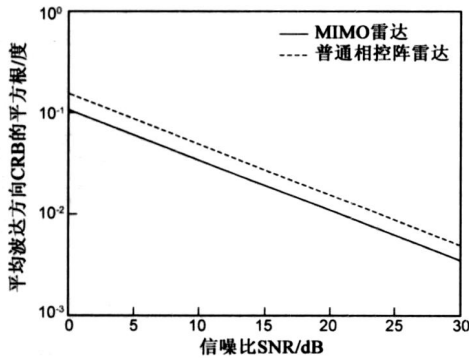


图4 MIMO雷达与相控阵雷达对一个相干分布式目标 $\bar{\theta}$ 估计的CRB的性能比较

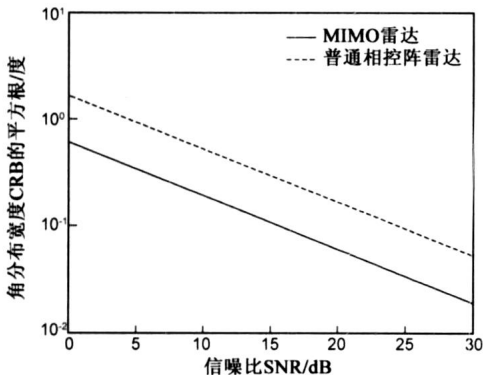


图5 MIMO雷达与相控阵雷达对一个相干分布式目标 Δ 估计的CRB的性能比较

图 4 和图 5 给出了 $\bar{\theta} = 0^\circ$, $\Delta = \mathcal{L}$, $M = 10$ 时, MIMO 雷达与普通相控阵雷达对一个相干分布式目标参数估计 CRB 的性能比较. 由图可知 MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计 CRB 小于普通相控阵雷达, 并且 MIMO 雷达与普通相控阵雷达对目标参数估计的 CRB 随信噪比 SNR 的增大而减小.

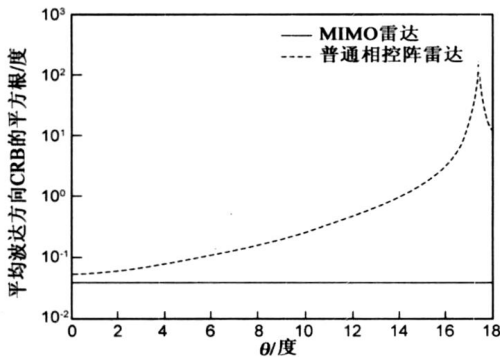


图6 波束形状损失对 $\bar{\theta}$ 估计CRB的影响

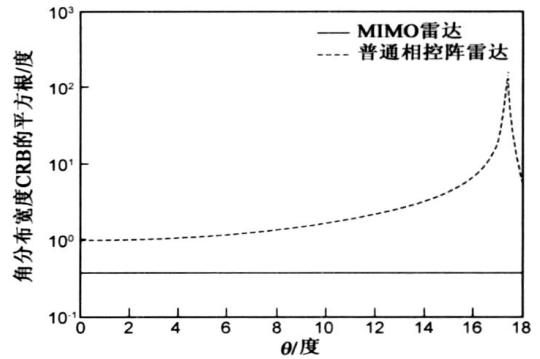


图7 波束形状损失对 Δ 估计CRB的影响

图 6 和图 7 给出普通相控阵雷达存在波束形状损失, 其发射波束指向角 θ 由 0° 变到 18° , 且 $\bar{\theta} = 0^\circ$, $\Delta = \mathcal{L}$, $M = 6$, $SNR = 20\text{dB}$ 时, 相控阵雷达和 MIMO 雷达对目标参数估计 CRB 的性能比较. 由图可知普通相控阵雷达对相干分布式目标参数估计 CRB 随着 θ 的增大而增大; 而 MIMO 雷达, 由于在发射端是向各方向均匀辐射能量, 不存在波束形状损失问题, 因此其性能优于普通相控阵雷达.

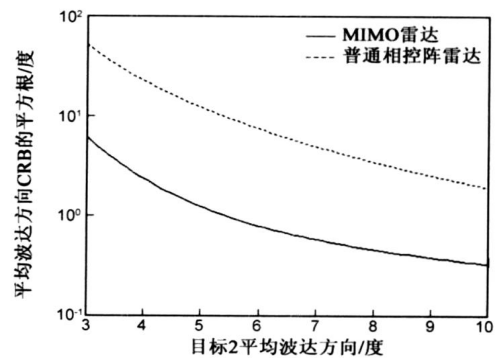


图8 MIMO雷达和相控阵雷达对 θ_1 估计CRB的性能比较

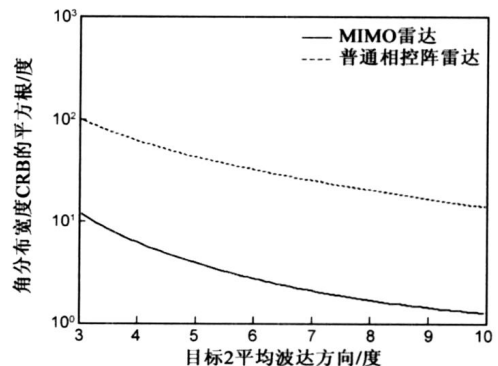


图9 MIMO雷达和相控阵雷达对 Δ_1 估计CRB的性能比较

图 8 和图 9 给出了 $M = 5$, $SNR = 30\text{dB}$, 目标 1 参数为 $(\bar{\theta}_1 = 0^\circ, \Delta_1 = \mathcal{L})$, 目标 2 的 Δ_2 为 1° , $\bar{\theta}_2$ 由 3° 变化到 10° 时, MIMO 雷达和普通相控阵雷达对目标 1 参数估计 CRB 的性能比较. 由图可知 MIMO 雷达对目标 1 参数估计的 CRB 小于普通相控阵雷达, 即 MIMO 雷达的分辨力高于普通相控阵雷达, 并且 MIMO 雷达与普通相控阵雷

达对目标 1 参数估计 CRB 都随目标 2 与目标 1 在空间上的分离程度的增大而减小。

图 10~ 12 给出了 $M=6$, 点目标的 DOA 为 10° , 分布式目标的 $\bar{\theta}=10^\circ, \Delta=3^\circ$ 时, MIMO 雷达对点目标和相干分布式目标参数估计 CRB 与是否已知目标回波强度 α 的

关系. 由图可知, MIMO 雷达对点目标 DOA 估计 CRB 与是否已知 α 无关, 而对相干分布式目标进行参数估计时, 在本文的仿真条件下, 虽然是否已知目标回波强度对 $\bar{\theta}$ 的估计 CRB 影响不大, 但已知 α 时对 Δ 的估计 CRB 明显小于 α 未知时的情形. 这与上节性质 1 所述一致.

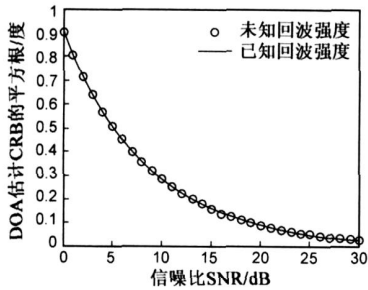


图 10 点目标 DOA 估计 CRB 与 α 是否已知的关系曲线

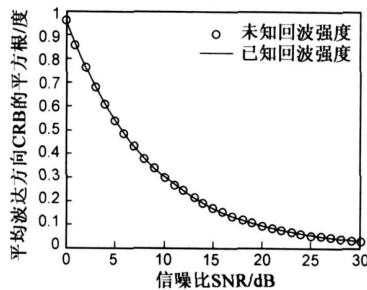


图 11 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与 α 是否已知的关系曲线

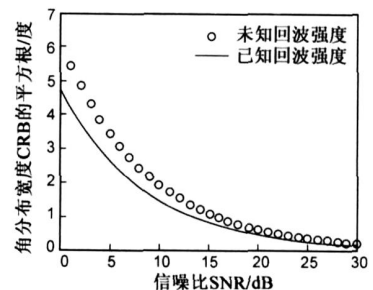


图 12 Δ 估计的 CRB 与 α 是否已知的关系曲线

图 13 给出了 $M=8$, 相干分布式目标 $\bar{\theta}=0^\circ$, MIMO 雷达对 $\bar{\theta}$ 的估计 CRB 与对 DOA 等于 $\bar{\theta}$ 的点目标 DOA 估计 CRB 之间的性能比较. 图 14 给出相同条件下, MIMO 雷达对分布式目标角分布宽度估计的 CRB 与 Δ 大

小之间的关系. 由图可知 MIMO 雷达对相干分布式 $\bar{\theta}$ 的估计 CRB 大于对点目标 DOA 估计 CRB, 对相干分布式目标角分布宽度的估计 CRB 随 Δ 的减小而增大, 当 Δ 趋近于零时趋近于无穷大. 这与上节性质 2 所述一致.

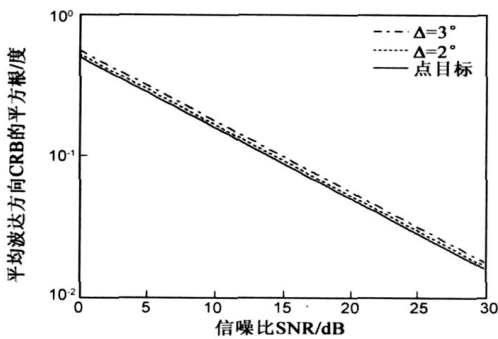


图 13 MIMO 雷达对 $\bar{\theta}$ 估计 CRB 与对点目标 DOA 估计 CRB 的性能比较

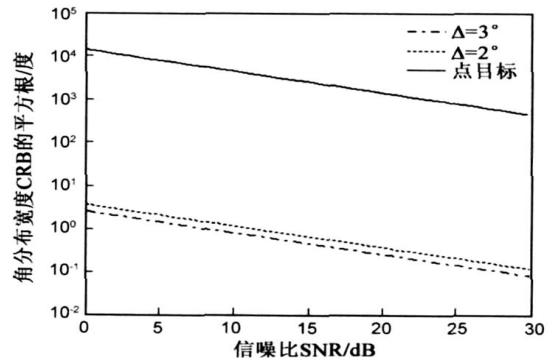


图 14 Δ 的估计 CRB 与 Δ 大小的关系曲线

图 15~ 17 给出了 $SNR=20\text{dB}, \bar{\theta}=10^\circ, \Delta=3^\circ$, 以第 1 个雷达单元为参考点, MIMO 雷达对相干分布式目标和点目标参数估计 CRB 与雷达单元个数的关系. 由图

可知, MIMO 雷达对相干分布式目标和点目标参数估计 CRB 都随雷达单元数的增大而减小. 这与上节性质 3 所述一致.

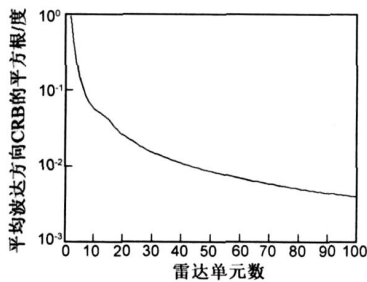


图 15 $\bar{\theta}$ 估计 CRB 与 M 的关系曲线

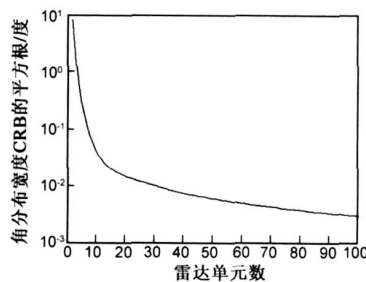


图 16 Δ 估计 CRB 与 M 的关系曲线

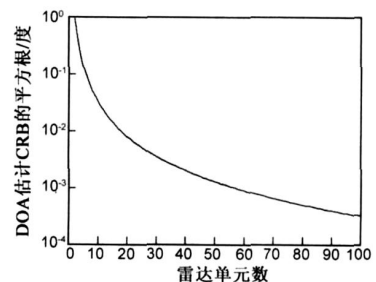


图 17 DOA 估计 CRB 与 M 的关系曲线

6 结论

本文研究了基于 MIMO 雷达的相干分布式目标参数估计 CRB, 揭示了 MIMO 雷达的相干分布式目标参数

估计性能. 结果表明同普通相控阵雷达相比, MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计具有低的 CRB. 理论推导和计算机仿真还证明 MIMO 雷达对相干分布式目标参数估计的性能低于对点目标的估计性能.

附录 A:

定义 $\alpha = [\text{Re}\{ \alpha_1 \}, \text{Im}\{ \alpha_1 \}, \dots, \text{Re}\{ \alpha_L \}, \text{Im}\{ \alpha_L \}]^T$, $\xi = [\phi^T \ \alpha^T]^T$, $\mu = \sum_{l=1}^L \alpha_l \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi_l) \mathbf{S})$, 则由式(3)可知, 估计 L 个相干分布式目标空间参数 ξ 的 Fisher 信息矩阵为 $\mathbf{J}(\xi) = \frac{2}{\sigma_w^2} \text{Re}\{ \mathbf{D}^H(\xi) \mathbf{D}(\xi) \}$, 其中 $\mathbf{D}(\xi) = \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varphi_1^T}, \dots, \frac{\partial \mu}{\partial \varphi_L^T}, \frac{\partial \mu}{\partial \text{Re}\{ \alpha_1 \}}, \frac{\partial \mu}{\partial \text{Im}\{ \alpha_1 \}}, \dots, \frac{\partial \mu}{\partial \text{Re}\{ \alpha_L \}}, \frac{\partial \mu}{\partial \text{Im}\{ \alpha_L \}} \right]$, $\frac{\partial \mu}{\partial \varphi_l^T} = \left[\frac{\partial \mu}{\partial \theta_l}, \frac{\partial \mu}{\partial \Delta_l} \right]$. 将 Fisher 信息矩阵表示成 ϕ 和 α 的分块矩阵 $\mathbf{J}(\xi) = [\mathbf{J}_{\phi\phi}, \mathbf{J}_{\phi\alpha}; \mathbf{J}_{\phi\alpha}^T, \mathbf{J}_{\alpha\alpha}]$, 则对相干分布式目标空间参数 ϕ 估计的 CRB 为

$$\text{CRB}(\phi) = [\mathbf{J}_{\phi\phi} - \mathbf{J}_{\phi\alpha} \mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{J}_{\phi\alpha}^T]^{-1} \quad (\text{A-1})$$

根据 $(\text{vec}(\mathbf{X}^H))^H \text{vec}(\mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y})$, $\mathbf{S}\mathbf{S}^H = N\mathbf{R}_s$, 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\alpha\alpha} &= \frac{2N}{\sigma_w^2} \text{Re}\{ [1 \ j] \mathbf{H} [1 \ j] \text{tr}(\mathbf{B}(\varphi_p) \mathbf{R}_s \mathbf{B}^H(\varphi_l)) \} \\ \mathbf{J}_{\varphi_p} &= \text{Re} \left\{ \alpha_l^* [1 \ j] \otimes \frac{2N}{\sigma_w^2} \left[\text{tr} \left(\mathbf{B}(\varphi_p) \mathbf{R}_s \frac{\partial \mathbf{B}^H(\varphi_l)}{\partial \theta_l} \right); \text{tr} \left(\mathbf{B}(\varphi_p) \mathbf{R}_s \frac{\partial \mathbf{B}^H(\varphi_l)}{\partial \Delta_l} \right) \right] \right\} \\ \mathbf{J}_{\varphi_p} &= [\mathbf{J}_{\theta_p}, \mathbf{J}_{\Delta_p}; \mathbf{J}_{\theta_p}^T, \mathbf{J}_{\Delta_p}^T] \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\theta_p} &= \frac{2N}{\sigma_w^2} \text{Re} \left\{ \alpha_l^* \alpha_p \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\varphi_p)}{\partial \theta_p} \mathbf{R}_s \frac{\partial \mathbf{B}^H(\varphi_l)}{\partial \theta_l} \right) \right\}, \\ \mathbf{J}_{\Delta_p} &= \frac{2N}{\sigma_w^2} \text{Re} \left\{ \alpha_l^* \alpha_p \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\varphi_p)}{\partial \Delta_p} \mathbf{R}_s \frac{\partial \mathbf{B}^H(\varphi_l)}{\partial \Delta_l} \right) \right\}, \\ \mathbf{J}_{\Delta_p} &= \frac{2N}{\sigma_w^2} \text{Re} \left\{ \alpha_l^* \alpha_p \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\varphi_p)}{\partial \Delta_p} \mathbf{R}_s \frac{\partial \mathbf{B}^H(\varphi_l)}{\partial \Delta_l} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$\alpha_l = [\text{Re}\{ \alpha_l \}, \text{Im}\{ \alpha_l \}]^T$, tr 表示矩阵的迹, \otimes 表示 Kronecker 积. 将式(A-2)代入式(A-1)通过数值计算即可求出对 ϕ 估计的 CRB.

同理对一个相干分布式目标的情形, 可求出 Fisher 信息矩阵各元素, 代入式(A-1)可求得式(5), 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\varphi) &= \left[\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S})}{\partial \theta}, \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S})}{\partial \Delta} \right], \\ \mathbf{P}_B^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{\text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S})(\text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S}))^H}{(\text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S}))^H \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi) \mathbf{S})} \end{aligned}$$

附录 B:

定义发射信号间的自相关矩阵为 $\mathbf{R}_s = [1 \ \beta_{12}; \beta_{21} \ 1]^T$, 当发射波束指向法线方向时, 两个雷达单元发射信号间相关系数的相位为零, 此时 $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta$ ($\beta \in [0 \ 1]$). 由定理 1 以及文献[13]中式(11), 可将 MIMO 雷达对已知小角分布宽度的分布式目标 $\bar{\theta}$ 估计的 CRB 与 β 的关系表示为:

$$\frac{1}{2\text{SNR} \left((2\tan^2(\bar{\theta})(a-b)^2 + 2a^2e_c^2) - G \right)} \quad (\text{B-1})$$

其中: $G =$

$$\frac{(2a(a-b)\tan(\bar{\theta}) + 2\beta\tan(\bar{\theta})(a-b)\cos(e_s) - 2a\beta e_c \sin(e_s))^2}{2 + 2a^2 + 4a\beta\cos(e_s)}$$

$e_s = 2d\pi\sin(\bar{\theta})/\lambda$, $e_c = 2d\pi\cos(\bar{\theta})/\lambda$, $a = \text{sinc}(d\Delta\cos(\bar{\theta})/\lambda)$, $\text{sinc}(\cdot) = \text{sin}(\pi\cdot)/(\pi\cdot)$, $b = \cos(2d\pi\Delta\cos(\bar{\theta})/\lambda)$. 对小角分布宽度目标, $a \approx b \approx 1$, 代入式(B-1)即可得式(6). 对式(6)右端对求导可知 $\beta = 0$ 为其极小值点, 故 $\text{CRB}_{\beta=0}(\bar{\theta}|\Delta) \leq \text{CRB}_{\beta}(\bar{\theta}|\Delta) \forall \bar{\theta}$. 当 $\bar{\theta} = 0$ 时, $\text{CRB}_{\beta}(\bar{\theta} = 0|\Delta) = \text{CRB}_{\beta=0}(\bar{\theta}|\Delta)$.

附录 C:

对于 MIMO 雷达, 其发射信号间的自相关矩阵为单位阵 \mathbf{I}_M . 当目标为点目标时, Fisher 信息矩阵为 $[\mathbf{J}_{\bar{\theta}}, \mathbf{J}_{\bar{\theta}\alpha}; \mathbf{J}_{\bar{\theta}\alpha}^T, \mathbf{J}_{\alpha\alpha}]$. 令导向向量为 $\mathbf{a}(\bar{\theta}) = [a_1(\bar{\theta}), \dots, a_M(\bar{\theta})]^T$, 则 $\mathbf{J}_{\bar{\theta}} = \frac{2NM}{\sigma_w^2} \text{Re}\{ \alpha^* \mathbf{a}^H(\bar{\theta}) \mathbf{I}_M \mathbf{a}(\bar{\theta}) [1 \ j] \}$. 当 $\sum_{m=1}^M z_m = 0$ 时, $\mathbf{a}^H(\bar{\theta}) \mathbf{a}(\bar{\theta}) = 0$, 故 $\mathbf{J}_{\bar{\theta}\alpha} = [0 \ 0]$, 因此点目标 DOA 估计 CRB 与是否已知 α 无关. 而对于相干分布式目标, 由于受到分布式参数的影响, 定理 1 中的 \mathbf{J}_{φ_p} 通常不为零, 故已知 α 时对相干分布式目标的参数估计 CRB 不大于未知 α 时的 CRB.

附录 D:

假设相干分布式目标的角功率密度函数为 $p(\theta|\varphi)$, 波达方向 θ 的方差为 σ^2 . 令 $\bar{p}(\phi) = \Delta p(\phi_{\Delta} + \bar{\theta}|\varphi)$, 则 $\bar{p}(\phi)$ 满足以下性质:

$$\int \bar{p}(\phi) d\phi = 1, \int \phi \bar{p}(\phi) d\phi = 0, \int \phi^2 \bar{p}(\phi) d\phi = \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \triangleq \sigma_1^2 \gg 0 \quad (\text{D-1})$$

令 $\mathbf{c}(\theta) = \text{vec}(\mathbf{A}(\theta))$, $\mathbf{d}(\varphi) = \text{vec}(\mathbf{B}(\varphi))$, 则 $\mathbf{d}(\varphi) = \int \bar{p}(\phi) \mathbf{c}(\phi_{\Delta} + \bar{\theta}) d\phi$. 由于是小角分布宽度目标, 对 $\mathbf{c}(\phi_{\Delta} + \bar{\theta})$ 在 $\bar{\theta}$ 点作泰勒级数展开并舍去 Δ 的高次项可得:

$$\mathbf{c}(\phi_{\Delta} + \bar{\theta}) \approx \mathbf{c}(\bar{\theta}) + \phi_{\Delta} \mathbf{c}_1(\bar{\theta}) + \frac{(\phi_{\Delta})^2}{2} \mathbf{c}_2(\bar{\theta}) + \frac{(\phi_{\Delta})^3}{6} \mathbf{c}_3(\bar{\theta}) \quad (\text{D-2})$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbf{d}_{\bar{\theta}} &= \frac{\partial \mathbf{d}(\varphi)}{\partial \bar{\theta}}, \mathbf{d}_{\Delta} = \frac{\partial \mathbf{d}(\varphi)}{\partial \Delta}, \mathbf{c}_n(\theta) = \frac{\partial_n \mathbf{c}(\theta)}{\partial \theta^n}, \text{ 则} \\ \mathbf{d}_{\bar{\theta}}^H \mathbf{d}_{\bar{\theta}} &\approx \mathbf{c}_1^H(\bar{\theta}) \mathbf{c}_1(\bar{\theta}) + \Delta^2 \sigma_1^2 \text{Re}(\mathbf{c}_1^H(\bar{\theta}) \mathbf{c}_3(\bar{\theta})) \\ \mathbf{d}_{\bar{\theta}}^H \mathbf{d}_{\Delta} &\approx \gamma_1 \Delta^2 + \gamma_2 \Delta^3 \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

其中 γ_1 和 γ_2 为常数.

由第 2 节的信号模型可推导出 $\text{Re}(\mathbf{c}_1^H(\bar{\theta}) \mathbf{c}_3(\bar{\theta})) \leq$

0, 所以 $CRB(\bar{\theta}|\alpha, \Delta) \geq CRB_{\bar{\theta}=\bar{\theta}}(\bar{\theta}|\alpha)$. 又因为雷达质心位于原点, 因此 $CRB_{\bar{\theta}=\bar{\theta}}(\bar{\theta}|\alpha) = CRB_{\bar{\theta}=\bar{\theta}}(\bar{\theta})$, 故 $CRB(\bar{\theta}|\alpha, \Delta) \geq CRB_{\bar{\theta}=\bar{\theta}}(\bar{\theta})$. 又因为 $CRB(\bar{\theta}|\alpha, \Delta) \leq CRB(\bar{\theta})$, 因此 $CRB(\bar{\theta}) \geq CRB_{\bar{\theta}=\bar{\theta}}(\bar{\theta})$.

由式 (D-3) 可得 $CRB(\Delta|\alpha, \bar{\theta}) = \frac{1}{2SNR} [v_1 \Delta^2 + v_2 \Delta^3]^{-1}$, 因此 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} CRB(\Delta|\alpha, \bar{\theta}) \rightarrow \infty$. 而 $CRB(\Delta) \geq CRB(\Delta|\alpha, \bar{\theta})$, 故 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} CRB(\Delta) \rightarrow \infty$.

附录 E:

先证明一个相干分布式目标的情形. 令 MIMO 雷达单元数为 M 和 $M+1$ 时, 分布式目标参数估计 CRB 为 $CRB_M(\varphi)$ 和 $CRB_{M+1}(\varphi)$, 方向矩阵分别为 $B_M(\varphi)$ 和 $B_{M+1}(\varphi)$. 则 $B_{M+1}(\varphi)$ 可表示为 $[B_M(\varphi) \mathbf{b}; \mathbf{b}^T \mathbf{e}]$. 令

$$\mathbf{u} = [\mathbf{b}^H \mathbf{b}^H \mathbf{e}^*]^T, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}^H}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{b}^H}{\partial \Delta} & \frac{\partial \mathbf{e}^H}{\partial \theta} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}^H}{\partial \Delta} & \frac{\partial \mathbf{b}^H}{\partial \Delta} & \frac{\partial \mathbf{e}^H}{\partial \Delta} \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_2 = [\mathbf{v}^T \mathbf{v}^T]^T,$$

$$h_M = [B_{1M}^H B_{1M}]^{-1},$$

$$B_{1M} = \text{vec}(B_M(\varphi)), \mathbf{G}_M = B_{1M}^H \frac{\partial \text{vec}(B_M(\varphi))}{\partial \varphi^T}.$$

经推导可得:

$$(CRB_{M+1}(\varphi))^{-1} = (CRB_M(\varphi))^{-1} + 2SNR \text{Re}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{G}_M^H h_M \mathbf{u})(\mathbf{v}_2 - \mathbf{G}_M^H h_M \mathbf{u})^H + h_M (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H \mathbf{u} \mathbf{u}^H - \mathbf{v}_2 \mathbf{u}^H \mathbf{u} \mathbf{v}_2^H)}{1 + h_M \mathbf{u} \mathbf{u}^H} \quad (\text{E-1})$$

因为矩阵 \mathbf{E} 为正定矩阵, 因此 $CRB_{M+1}(\varphi) \leq CRB_M(\varphi)$, 即 MIMO 雷达对一个相干分布式目标参数估计的 CRB 随雷达单元数 M 的增大而减小.

一个点目标时的情形, 将相干分布式目标的方向矩阵 $B(\varphi)$ 换成 $A(\theta)$ 即可证明结论.

参考文献:

- [1] 何子述, 韩春林, 刘波. MIMO 雷达概念及其技术特点分析[J]. 电子学报, 2005, 33(12A): 2441-2445.
He Z S, Han C L, L B. MIMO radar and its technical characteristic analyses[J]. ACTA Electronica Sinica, 2005, 33(12A): 2441-2445.
- [2] A Luce, et al. Experimental results on SIAR digital beamforming radar[A]. 1992 IEEE International Radar Conference[C]. London, 1992. 505-510.
- [3] Forsythe K W, Bliss D W. Waveform correlation and optimization issues for MIMO radar[A]. In: Conference Record of the 39th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers

- [C]. Pacific Grove, CA, United States, 2005. 1306-1310.
- [4] Xu L Z, Li J, Stoica P. Adaptive techniques for MIMO radar [A]. In: the 4th IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing[C]. Waltham, MA, United States, 2006. 258-262.
- [5] Bekkerman I, Tabrikian J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. IEEE Trans. on SP., 2006, 54(10): 3873-3883.
- [6] Fishler E, Haimovich A, Blum R S, et al. Spatial diversity in radars- models and detection performance[J]. IEEE Trans. on SP., 2006, 54(3): 823-838.
- [7] 李燮, 张林让, 郭东敏, 等. 分布式目标参数估计在引信中的应用研究[J]. 探测与控制学报, 2003, 25(2): 32-35.
Li X; Zhang L R; Guo D M, et al. The application of distributed sources parameter estimation in fuze system[J]. Journal of detection & control, 2003, 25(2): 32-35.
- [8] Valaee S, Champagne B, Kabal P. Parametric localization of distributed sources[J]. IEEE Trans. on SP., 1995, 43(9): 2144-2153.
- [9] Meng Y, Stoica P, Wong K M. Estimation of the directions of arrival of spatially dispersed signals in array processing[J]. IEEE Proceeding F, 1996, 143(1): 1-9.
- [10] Lee Y U, Choi J, Song I, et al. Distributed source modeling and direction of arrival estimation techniques[J]. IEEE Trans. on SP., 1997, 45(4): 960-969.
- [11] Raich R, Goldberg J, Messer H. Bearing estimation for a distributed source via the conventional beamformer [A]. In: the 9th IEEE SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing[C]. Portland, OR, USA, 1998. 5-8.
- [12] Raich R, Goldberg J, Messer H. Bearing estimation for a distributed source: Modeling, inherent accuracy limitations and algorithms[J]. IEEE Trans. on SP., 2000, 48(2): 429-441.
- [13] Goldberg J, Messer H. Inherent limitations in the localization of a coherently scattered source [J]. IEEE Trans. on SP., 1998, 46(12): 3441-3444.
- [14] Kay S M, Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

作者简介:

江胜利 男, 1979 年出生于安徽省黄山市. 现为南京理工大学电子工程系博士研究生. 主要研究方向: 雷达波形设计与信号处理、非高斯信号处理. E-mail: jsj2006_hz@163.com

刘中 男, 1963 年出生于安徽省. 现为南京理工大学电子工程系教授, 博士生导师. 主要研究方向: 现代信号处理、传感器网络、混沌与信息动力学. E-mail: eezliu@mail.njust.edu.cn